

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
БІЛІМ ЖӘНЕ ФЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН



ҚазҰТЗУ ХАБАРШЫСЫ

ВЕСТНИК КАЗНИТУ

VESTNIK KazNRTU

№ 2 (132)

Главный редактор
И. К. Бейсембетов – ректор

Зам. главного редактора
Б.К. Кенжалиев – проректор по науке

Отв. секретарь
Н.Ф. Федосенко

Редакционная коллегия:

З.С. Абишева- акад. НАНРК, Л.Б. Атымтаева, Ж.Ж. Байгунчеков- акад. НАНРК, А.Б. Байбатша, А.О. Байконурова, В.И. Волчихин (Россия), К. Дребенштед (Германия), Г.Ж. Жолтаев, Г.Ж. Елигбаева, Р.М. Искаков, С.Е. Кудайбергенов, Б.У. Куспандалиев, С.Е. Кумеков, В.А. Луганов, С.С. Набойченко – член-корр. РАН, И.Г. Милев (Германия), С. Пежовник (Словения), Б.Р. Ракишев – акад. НАН РК, М.Б. Панфилов (Франция), Н.Т. Сайлаубеков, А.Р. Сейткулов, Фатхи Хабаши (Канада), Бражендра Мишра (США), Корби Андерсон (США), В.А. Гольцев (Россия), В. Ю. Коровин (Украина), М.Г. Мустафин (Россия), Фан Хуаан (Швеция), Х.П. Цинке (Германия), Е.М. Шайхутдинов-акад. НАНРК, Т.А. Чепуштанова

Учредитель:

Казахский национальный исследовательский технический университет
имени К.И. Сатпаева

Регистрация:

Министерство культуры, информации и общественного согласия
Республики Казахстан № 951 – Ж “25” 11. 1999 г.

Основан в августе 1994 г. Выходит 6 раз в год

Адрес редакции:

г. Алматы, ул. Сатпаева, 22,
каб. 609, тел. 292-63-46
Nina. Fedorovna. 52 @ mail.ru

$$A = - (mgh_2 - mgh_1)$$

Обозначим потенциальную энергию mgh через E_p ($E_p = mgh$), тогда можно написать в таком виде: $A = - (E_p 2 - E_p 1)$. Поскольку сила тяготения Земли направлена против движения тела массы m , ее работа отрицательна.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Кронгарт Б., Кем В., Койшыбаев Н. Физика 10. Учебник для 10 классов естественно-математического направления общеобразовательных школ. Алматы «Мектеп» 2006. – 350 с.
- [2] Перышкин А.В., Гутник Е.М. Физика 9 класс //Учебник для общеобразовательных учреждений. – М.: Дрофа. – 300 с.
- [3] Физика (Механика). Учебник для углубленного изучения физики // Под редакцией Г.Я.Мякишева. Москва «Дрофа» 1998 г. – 496 с.
- [4] Мукушев Б.А. «Энергия связи» в задачах // Потенциал. – 2011.-№11.

Мукушев Б.А., Абельдина Ж.К., Жанайдарова Ж.Х., Нурбатырова Т.С.,
Шакерхан Н., Сыдыкова Ж.К., Ерженбек Б.

Потенциалдық энергия үғымын қалыптастыру

Түйіндеме. Мақалада физикадан білім берудегі потенциалдық энергия үғымын қалыптастыру қарастырылады. Авторлар осы үғымды материалдық нұктелердің өзара әрекеттесуінің гравитациялық энергиясын таныстыру негізінде оқып үйрену әдісін ұсынады. Өзара әсерлесетін денелердің потенциалдық энергиясының теңдеуін алғаннан осы нәтижелерді «Жер-дене» жүйесіне көшіріледі. Авторлар дene мен Жер арасындағы өзара әрекеттестіктің потенциалды энергиясын есептеудің екі әдісін ұсынады. Жердің гравитациялық потенциалы мен байланыс энергиясы қарастырылады. Жердің тартылыс ерісінде орналасқан денеге қатысты екі формуланың бірдей екені анықталды.

Түйінді сөздер: Потенциалды энергия, материалдық нұктелердің өзара әрекеттестігі, гравитациялық потенциал, байланыс энергиясы, потенциалдық шұнқырь.

УДК 519.612

¹N.M. Kassymbek, ¹B. Matkerim, ¹T.S. Imankulov, ²D.Zh. Ahmed-Zaki
(¹Al-Farabi Kazakh National University, ²University of International Business)

ANALYSIS OF NUMERICAL SOLUTION OF POISSON EQUATION BY ILU (0)-GMRES METHOD

Abstract. In this paper, we analyze the GMRES and GMRES methods with the ILU (0) preconditioner using the example of solving the two-dimensional Poisson equation. To accelerate the method of convergence, the ILU(0) preconditioner was used and the corresponding changes were made to the GMRES algorithm. CSR format was used to store sparse matrices. Data of iterations number for the method of convergence without preconditioner and with the preconditioner ILU(0) were obtained and analyzed.

Key words. GMRES, ILU factorization, preconditioner, ILU(0)-precondition, Poisson equation, CSR format.

¹Н.М. Касымбек, ¹Б. Маткерим, ¹Т.С. Иманкулов, ²Д.Ж. Ахмед-Заки
(¹Казахский национальный университет имени аль-Фараби,
²Университет международного бизнеса)

АНАЛИЗ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА МЕТОДОМ ILU(0)-GMRES

Аннотация. В данной работе проводится анализ методов GMRES и GMRES с предобуславливателем ILU(0) на примере решения двумерного уравнения Пуассона. Для ускорения сходимости метода был использован предобуславливатель ILU(0) и в алгоритм GMRES были внесены соответствующие изменения. Для хранения разреженных матриц использовался формат CSR. Были получены и проанализированы данные количества итерации сходимости метода без предобуславливателя и с предобуславливателем ILU(0).

Ключевые слова. GMRES, ILU-факторизация, предобуславливатель, ILU(0)-предобуславливание, уравнение Пуассона, CSR формат.

Введение. Актуальной задачей алгебры разреженных матриц является решение системы

$$Ax = b, \quad (1)$$

где A -разреженная матрица размера $n \times n$. Такие задачи возникают при решении многих задач математической физики [1,2]. Методы решения таких систем делятся на прямые и итерационные. Итерационные методы применяются при решении задач больших размерностей, когда прямые методы не могут использоваться из-за ограничений в памяти и долгого времени расчета.

Итерационные методы приближают решение системы к точному решению за определенную последовательность итераций. Йозеф Саад и другие разработали итерационный метод решения СЛАУ под названием GMRES - Generalized minimal residual method [3]. GMRES – метод обобщенных минимальных невязок, итерационный метод нахождения приближенного решения СЛАУ [4,5]. Алгоритм был разработан Йозефом Саадом и Мартином Г. Шульцем. GMRES является линейным решателем подпространства Крылова общего назначения и может быть применен к любым видам систем. Метод, для нахождения минимизирующего невязку вектора из подпространства Крылова, опирается на алгоритм Арнольди.

Проблемы сходимости методов – основные вопросы которые возникают при исследовании качества итерационных методов. На эффективность решения систем итерационными методами влияет обусловленность матрицы решаемой системы уравнений [6,7]. Для более эффективного решения используются предобуславливатели. В данной работе в качестве предобуславливателя был выбран ILU(0). Неполное LU разложение (ILU(0)) является эффективным предобуславливателем и легко реализуется [3,6,7,8].

В данной статье рассматривается решение двумерного уравнения Пуассона методом GMRES и GMRES с предобуславливателем ILU(0).

Алгоритм GMRES. Система вида

$$Ax = b$$

рассматривается в подпространстве Крылова:

$$K_m = K_m(A, b) = \text{span}\{b, Ab, A^2b, \dots, A^{m-1}b\}$$

Если построить подпространство $x_0 + K_m$, то любой вектор x из этого подпространства может быть представлен в виде:

$$x = x_0 + V_m y.$$

где V_m – матрица из векторов ортонормированного базиса подпространства K_m , y – вектор размерности m . В этом случае невязку уравнения можно определить как функцию

$$J(y) = \|b - Ax\| = \|b - A(x_0 + V_m y)\| \quad (2)$$

В связи с тем, что столбцы матрицы V_{m+1} составляют ортонормированную систему векторов, выполняется следующее соотношение:

$$J(y) = \|b - A(x_0 + V_m y)\| = \|\beta e_1 - \bar{H}_m y\|.$$

GMRES аппроксимирует точное решение данной системы (1) вектором x_m из подпространства $x_0 + K_m$, который в свою очередь минимизирует невязку (2). Вектор x_m может быть получен следующим образом:

$$x_m = x_0 + V_m y_m \quad (3)$$

где y_m – вектор, находящийся в виде решения линейной задачи наименьших квадратов размера $(m+1) \times m$, где $m \ll n$.

$$y_m = \arg \min_y \|\beta e_1 - \bar{H}_m y\|.$$

Для вычисления \mathbf{y}_m решим систему $\bar{\mathbf{H}}_m \mathbf{y} = \beta \mathbf{e}_1$ в виде задачи наименьших квадратов. Матрица $\bar{\mathbf{H}}_m$ приводится к верхнетреугольному виду с помощью вращений Гивенса [9]. Определяется матрица вращения Ω_i с коэффициентами вращения c_i, s_i , которая при умножении на систему $\bar{\mathbf{H}}_m \mathbf{y} = \beta \mathbf{e}_1$ обнуляет элемент $h_{i+1,i}$, при этом $c_i^2 + s_i^2 = 1$. Таким образом для i -того шага получим:

$$s_i = \frac{h_{i+1,i}}{\sqrt{h_{i,i}^2 + h_{i+1,i}^2}} \text{ и } c_i = \frac{h_{i,i}}{\sqrt{h_{i,i}^2 + h_{i+1,i}^2}}.$$

$$\Omega_i = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & c_i & s_i \\ & & & -s_i & c_i \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Рис. 1. Вид матрицы вращения Ω_i

Обозначим $Q_m = \Omega_m \cdot \Omega_{m-1} \cdot \dots \cdot \Omega_1$. Тогда:

$$\bar{\mathbf{R}}_m = Q_m \bar{\mathbf{H}}_m$$

$$\bar{\mathbf{g}}_m = Q_m (\beta \mathbf{e}_1) = (\gamma_1, \dots, \gamma_m, \gamma_{m+1})^T$$

Так как Q_m унитарная матрица, выполняется следующее равенство:

$$\min_y \|\beta \mathbf{e}_1 - \bar{\mathbf{H}}_m \mathbf{y}\| = \min_y \|\bar{\mathbf{g}}_m - \bar{\mathbf{R}}_m \mathbf{y}\|$$

Решив систему $\bar{\mathbf{R}}_m \mathbf{y}_m = \bar{\mathbf{g}}_m$ относительно \mathbf{y} , и подставив результат в уравнение (3) находится конечное приближенное решение \mathbf{x}_m для системы (1). Для решения \mathbf{y}_m невязка $\|\beta \mathbf{e}_1 - \bar{\mathbf{H}}_m \mathbf{y}\|$ совпадает с последним элементом γ_{m+1} вектора правой части $\bar{\mathbf{g}}_m$. Это же значение совпадает с невязкой исходной системы, то есть:

$$\|r_m\| = \|b - Ax_m\| = |\gamma_{m+1}|$$

Данное значение может использоваться в качестве критерия остановки метода.

GMRES с предобусловливанием ILU(0). Предобусловливание – модификация системы линейных уравнений (1), которая упрощает решение этой системы с помощью разных методов. Цель предобусловливания – перейти от плохо обусловленной системы к хорошо обусловленной системе для сокращения числа итераций [10].

В данной работе рассматривался предобусловливание с помощью домножения исходной системы (1) на некоторую матрицу M^{-1} , то есть переход к системе вида:

$$M^{-1}Ax = M^{-1}b$$

Матрицу M называют предобуславливателем. Есть такие виды предобуславливания как SSOR, SGS, ILU. Для этой работы был выбран предобуславливатель ILU(0), метод также называется неполным LU разложением. При полном LU разложении разреженной матрицы, портер найденных матриц L и U не совпадают с портретом исходной матрицы, то есть, индексы изначально нулевых элементов могут быть дополнены значениями что приводит к потерям в памяти. Для решения этой проблемы сформулируем алгоритм ILU факторизации на основе полного LU разложения методом Гаусса, алгоритм которого выглядит следующим образом:

```

for k = 1 to n - 1
    for i = k + 1 to n
         $l_{ik} = a_{ik}/a_{kk}$ 
    end
    for j = k + 1 to n
        for i = k + 1 to n
             $a_{ij} = a_{ij} - l_{ik}a_{kj}$ 
        end
    end
end
end

```

Для нахождения неполного разложения достаточно проводить расчеты только в пределах портрета матрицы A , то есть, $NZ(A) = \{(i,j) : a_{ij} \neq 0\}$ [11]. Покажем модификацию алгоритма для неполного разложения ILU(0):

```

for k = 1 to n - 1
    for i = k + 1 to n and if (i,k) ∈ NZ(A) do
         $l_{ik} = a_{ik}/a_{kk}$ 
    end
    for j = k + 1 to n
        for i = k + 1 to n and if (i,j) ∈ NZ(A) do
             $a_{ij} = a_{ij} - l_{ik}a_{kj}$ 
        end
    end
end
end

```

Смысл неполоного разложения – представление исходной матрицы A в виде

$$A = LU + R$$

где L и U – нижнетреугольная и верхнетреугольная матрицы соотвественно, полученные неполной факторизацией, R – невязка факторизаций. После проведения ILU факторизации, матрицу

$$M = LU$$

можно использовать в виде предобуславливателя. Для реализации алгоритма GMRES с ILU(0) предобуславливателем [12], занесем некоторые изменения:

```

for j = 1 to m
     $w = M^{-1}Av_j$ 
    for i = 1 to j
         $h_{ij} = (w, v_i)$ 
         $w = w - h_{ij}v_i$ 
    end

```

```

 $h_{j+1,j} = \|w\|$ 
 $v_{j+1} = w/h_{j+1,j}$ 
end

```

в самом начале вычислить r_0 как $r_0 = M^{-1}(b - Ax_0)$;

выполнить m шагов алгоритма Арнольди;

- далее вычислить конечное приближение из уравнения (3)

Численные эксперименты. В данной работе было выбрано уравнение Пуассона вида:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f \quad (4)$$

где f непрерывная функция

$$f(x, y) = -6$$

с граничными значениями

$$\begin{aligned} u(0, y) &= 1 + y^2; \\ u(1, y) &= 2 + y^2; \\ u(x, 0) &= 1 + x^2; \\ u(x, 1) &= 2 + x^2. \end{aligned}$$

Область вычисления

$$\Omega = [0, 1] \times [0, 1].$$

Если разностную аппроксимацию уравнения (4) записать для каждой внутренней точки области, то можно получить систему линейных уравнений вида (1) с количеством неизвестных, равным числу внутренних точек сетки [13]. Полученная система решалась методом GMRES и GMRES с предобуславливанием ILU(0). Матрица коэффициентов данной системы не будет иметь трехдиагональную структуру и к тому же будет разреженным.

Хранение полной матрицы со всеми нулевыми элементами приводит к очень большим тратам памяти. В цели оптимизации памяти был выбран формат хранения разреженных матриц CSR [14,15].

CSR (Compressed Sparse Rows) – формат хранения разреженных матриц в строчном виде. В данном формате используются три одномерных массива:

- первый массив values хранит значения всех ненулевых элементов построчно;
- второй массив cols хранит номера столбцов элементов массива values;
- третий массив rowindex хранит индекс начала каждой строки.

Количество элементов массива rowindex равно $n+1$. i -тый элемент массива rowindex показывает на начало i -той строки в массиве элементов values. То есть, элементы строки i в массиве values находятся в пределах индексов $\text{rowindex}[i]$ и $\text{rowindex}[i+1]-1$ включительно. Приведем пример, пусть дана матрица A в следующем виде:

1	0	0	4	0
0	3	0	0	0
0	0	2	0	6
0	1	0	0	3
5	0	0	7	0

В таком случае вышеприведенные массивы формата CSR будут в виде:

values:	1	4	3	2	6	1	3	5	7
cols:	0	3	1	2	4	1	4	0	2
rowindex:	0	2	3	5	7	9			

Как видим, размер массивов values и cols равна NZ (количество ненулевых элементов).

В нашем случае, если взять размер сетки уравнения Пуассона равным 100×100 , то размер матрицы A будет 9604×9604 . Размер в памяти этой матрица в полном виде с типом double будет примерно 704 МБ. А если взять только ненулевые элементы такой матрицы, они будут занимать в памяти только примерно 0,36 МБ. Посчитаем занимаемое место в памяти матрицы для сетки 100×100 в формате CSR, оно будет равно 0,8 МБ. Как можно увидеть, формат CSR дает возможность хранить намного большие разреженные матрицы.

Результаты и анализ. Были произведены вычислительные эксперименты в разных размерах сетки Пуассона. В частности, было определено количество итераций нужных для сходимости метода с и без предобуславливания. Сравнивались время выполнения двух программ.

В следующей таблице можно увидеть описание матриц, с которыми проводились вычисления. Как говорилось ранее, размерность матрицы A совпадает с количеством внутренних точек сетки уравнения Пуассона. Матрица имеет пятидиагональную структуру, исходя из этого можно посчитать количество ненулевых элементов.

Таблица 1. Использованные матрицы

Номер матрицы	1	2	3
Сетка уравнения Пуассона	100x100	200x200	300x300
Размерность матрицы A	9604x9604	39204x39204	88804x88804
Количество ненулевых элементов	47628	195228	442828
Номер матрицы	4	5	6
Сетка уравнения Пуассона	400x400	500x500	600x600
Размерность матрицы A	158404x158404	248004x248004	357604x357604
Количество ненулевых элементов	790428	1238028	1785628

В следующих рисунках номера матриц в оси ОХ совпадают с матрицами из Таблицы 1.



Рис. 2. Количество итераций сходимости метода

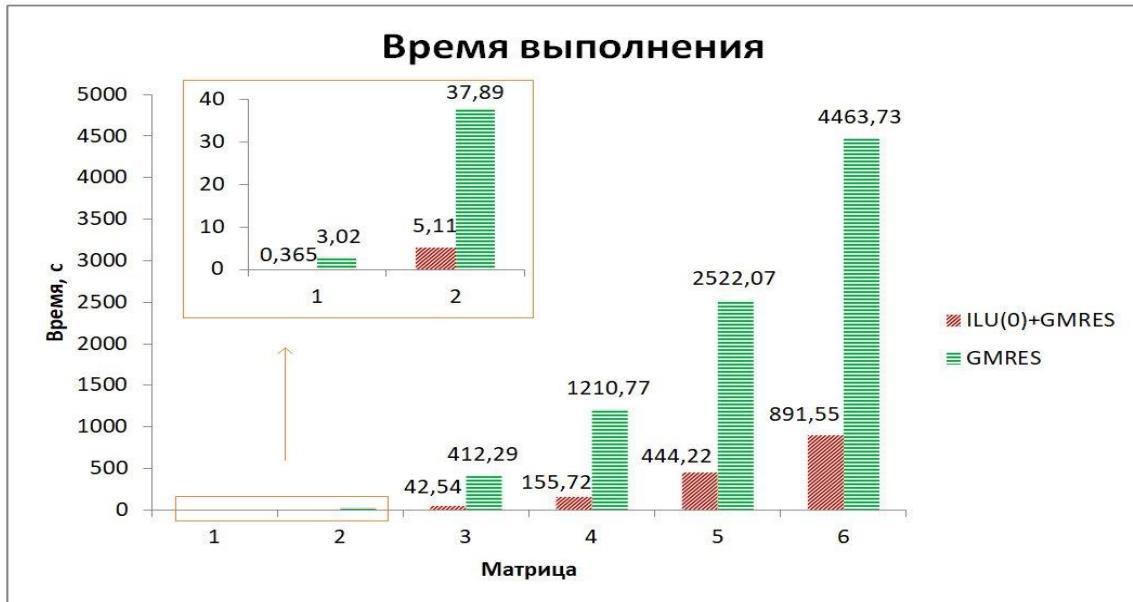


Рис. 3. Время выполнения

По описанным матрицам в таблице 1 вы можете увидеть что, как и упоминалось раньше, размерность решаемой системы равна количеству внутренних точек сетки уравнения Пуассона. Как можете увидеть, в рисунке 1, во всех матрицах количество нужных итераций для сходимости метода с предобуславливанием меньше чем количество итераций GMRES. Из-за этого в рисунке 3 видим, что время выполнения программы GMRES в 5-8 раз больше чем время исполнения программы GMRES с ILU(0) предобуславливанием.

Выходы. Метод GMRES может быть использован для решения систем любого вида, предобуславливание ускоряет сходимость метода. Данная статья была посвящена анализу методов GMRES и GMRES с предобуславливанием ILU(0) на примере решения двумерного уравнения Пуассона. Матрицы коэффициентов уравнения Пуассона являются разреженными, поэтому использовался формат хранения матриц CSR, что позволил работать с довольно большими матрицами. В данной задаче количество итерации и время выполнения ILU(0)-GMRES метода меньше чем у GMRES. Это позволяет сделать вывод что метод с предобуславливанием ILU(0) лучше справляется с данной задачей.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. –М.: Наука, 1977.
- [2] Вержбицкий В.М. Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения). – М.: Высшая школа, 2001.
- [3] Saad Y. Iterative methods for sparse linear systems. – SIAM, 2003.
- [4] PKW Vinsome, Orthomin, an iterative method for solving sparse sets of simultaneous linear equations, SPE Symposium on Numerical Simulation of Reservoir Performance, 1976.
- [5] Saad Y., Schultz, M.H. GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems // SIAM J. on scientific and statistical computing. – 1986. – Vol. 7, No. 3. – P. 856 – 869.
- [6] R. Li, Y. Saad GPU-accelerated preconditioned iterative linear solvers, Technical Report umsi-2010-112, Minnesota Supercomputer Institute, University of Minnesota, Minneapolis, MN, 2010.
- [7] R. Barrett, M. Berry, T.F. Chan, J. Demmel, J. Donato, et al. Templates for the solution of linear systems: building blocks for iterative methods. (2nd edn), SIAM, 1994.
- [8] H. Klie, H. Sudan, Li R, Y. Saad Exploiting capabilities of many core platforms in reservoir simulation. SPE RSS Reservoir Simulation Symposium, 2011, pp. 21-23.
- [9] Белов С.А., Золотых Н.Ю. Численные методы линейной алгебры. – Н.Новгород, Изд-во ННГУ, 2005.
- [10] Benzi M. Preconditioning Techniques for Large Linear Systems: A Survey // Journal of Computational Physics. — 2002. — Vol. 182, No 2. — Pp. 418–477.
- [11] Chow E., Saad Y. ILUS: an Incomplete LU Preconditioner in Sparse Skyline Format. — In: Int. J. for Num. Meth. in Fluids. — Vol. 25, 739–748 (1997).
- [12] Saad Y. A Flexible Inner-Outer Preconditioned GMRES Algorithm // SIAM Journal on Scientific Computing. — 1993. — Vol. 14, No 2. — Pp. 461–469.

- [13] Емельянов, В. Н. Численные методы: введение в теорию разностных схем : учеб. пособие для академического бакалавриата / В. Н. Емельянов. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018. — 188 с.
- [14] Писсанецки С. Технология разреженных матриц : пер. с англ. / С. Писсанецки . — М. : Мир, 1988 . — 411 с.
- [15] Тьюарсон Р. Разреженные матрицы. Перевод с английского Э. М. Пейсаховича, под редакцией Х. Д. Икрамова, издательство „МИР“, Москва 1977, 172с

Касымбек Н.М, Маткерим Б., Иманкулов Т.С., Ахмед-Заки Д.Ж.

ILU (0) -GMRES әдісімен Пуассон тендеуінің сандық шешімін талдау

Түйіндеме. Бұл жұмыста біз Пуассон тендеуін сыйықтық тендеулер түрін көлтіріп, GMRES және ILU(0) алғашарттағышы қосылған GMRES әдістерімен шештік. GMRES әдісі жалпы жағдайда кез келген сыйықтық тендеулер жүйесін шешуге арналған. Бұл Крылов типті әдісті Йозеф Саад және Мартин Шульц ойлап тапқан. Әдіс Арнольди итерацияларының көмегімен Крылов ішкі кеңістігіндегі базисті құрады. GMRES және басқа да итерациялық әдістердің жинақталуын тездету үшін, яғни, итерациялар санын азайту үшін шешілетін жүйені алғышарттайты. ILU(0) алғышарттағышы LU ыдырауының көмегімен өте оңай табылады. Жұмыс барысында Пуассон тендеуі GMRES алгоритмінің көмегімен шешілді. Сыйықтық түрге көлтірілген матрица сирек толтырылған болғандықтан матрицының жадыда сақтау үшін CSR форматы қолданылды. GMRES алгоритміне қарағанда ILU(0)+GMRES, яғни, алғышарттағыш қосылған алгоритм 5-8 есе жылдам жинақталды.

Жұмыс нәтижесінде ILU(0) алғышарттағышы көмегімен итерациялық алгоритмдердің жинақталуын жылдамдатуға болатыны көрсетілді.

Түйінді сөздер. GMRES, ILU-факторизация, алғышарттағыш, ILU(0)-алғышарттауы, Пуассон тендеуі, CSR форматы.

УДК 517.946

A.S. Sakabekov, S.N.Madaliyeva

(Institute of Basic Education, Satpayev University, Almaty, Kazakhstan)

E-mail: auzhani@gmail.com, madalieva_s@mail.ru

A BOUNDARY VALUE PROBLEM SOLUTION FOR A STATIONARY LINEAR ONE-DIMENSIONAL SYSTEM OF BOLTZMANN QUICK EQUATIONS IN THE THIRD APPROXIMATION UNDER THE GENERALIZED VLADIMIROV-MARSHAK BOUNDARY CONDITIONS BY THE FINITE-DIFFERENCE METHOD

Abstract. An algorithm was developed for the boundary value problem numerical solution for the stationary linear system of Boltzmann quick equations in the third approximation under the generalized Vladimirov – Marshak boundary conditions by a finite difference method and the result of a numerical experiment is given.

Key words: Boltzmann quick equations, generalized Vladimirov-Marshak boundary conditions

A.C. Сакабеков, С.Н. Мадалиева

(Казахский национальный исследовательский технический университет имени К.И.Сатпаева
Алматы, Республика Казахстан, E-mail: auzhani@gmail.com, madalieva_s@mail.ru)

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ОДНОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ МОМЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА В ТРЕТЬЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ ПРИ ОБОБЩЕННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ВЛАДИМИРОВА-МАРШАКА КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫМ МЕТОДОМ

Аннотация. Составлен алгоритм численного решения краевой задачи для стационарной линейной системы моментных уравнений Больцмана в третьем приближении при обобщенных граничных условиях Владимирова-Маршака конечно - разностным методом и приведен результат численного эксперимента.

Ключевые слова: моментные уравнения Больцмана, обобщенные граничные условия Владимирова-Маршака.

В случае одноатомного газа любая макроскопическая система в процессе своей эволюции к состоянию равновесия проходит 3 этапа: начальный переходный период – описывается в терминах полной функции распределения системы, кинетический период – с помощью одночастичной функции распределения, которая удовлетворяет уравнению Больцмана, гидродинамический период – с помощью пяти однородных уравнений относительно плотности, средней скорости, температуры и др., которые соответствуют законам сохранения массы, импульса и энергии. Эти пять уравнений образуют незамкнутую систему, т.к. содержат 13 неизвестных. Для того, чтобы замкнуть эту систему

Физика-математика ғылымдары

<i>Койшыбаев А.Б., Велямов Т.Т.</i>	
ОБЪЕКТИЛЕРДІ ӘЗІРЛЕУДІҢ САНДЫҚ ИМПУЛЬСТІК БАСҚАРУ МОДУЛЯЦИЯСЫН МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕУ	467
<i>Абдуллин Х.А., Калкозова Ж.К., Мукашев Б.Н., Мухамедшина Д.М., Серикканов А.С.</i>	
НАНОҚҰРЫЛЫМДАЛҒАН МЫРЫШ ОКСИДІН СИНТЕЗДЕУДІҢ ӘДІСІН ЖАСАУ ЖӘНЕ ФОТОКАТАЛИЗАТОРЛАР ҮШІН МАТЕРИАЛДАР АЛУ	472
<i>Сармасаев М., Айтан Н., Жанабекова Ж., Мукиат С.</i>	
ЖОҒАРЫ САПАЛЫ ДЕНЕ ШЫНЫҚТЫРУДЫ ҚАЛЫПТАСТЫРУДЫН ДИДАКТИКАЛЫҚ- ӘДІСТЕМЕЛІК ПРИНЦИПТЕРИ ТУРАЛЫ.....	480
<i>Сармасаев М., Айтан Н., Жанабекова Ж., Мукиат С.</i>	
«БІЛІМ БЕРУ СТАНДАРТЫНЫң МАЗМУНЫНЫң САПАСЫН ЖӘНЕ ОНЫң «БАҚЫЛАУ ЖӘНЕ БАҒАЛАУ МАТЕРИАЛДАРЫНЫң» ФИЗИКАЛЫҚ БІЛІМ БЕРУ САПАСЫ....	485
<i>Мукушев Б.А., Алимкулова Э. Ж., Жокижанова С.К., Ибатаев Ж.А., Нургазина Г.М., Нургалиева Да.А., Сыдыкова Ж.К., Ерженибек Б.</i>	
«БАЙЛАНЫС ЭНЕРГИЯСЫ» ҰҒЫМЫН ҚАЛЫПТАСТЫРУДАҒЫ САБАҚТАСТЫҚ.....	491
<i>Мукушев Б.А., Абелльдина Ж.К., Жанайдарова Ж.Х., Нұрбатырова Т.С., Шакерхан Н., Сыдыкова Ж.К., Ерженибек Б.</i>	
ПОТЕНЦИАЛДЫҚ ЭНЕРГИЯ ҰҒЫМЫН ҚАЛЫПТАСТЫРУ	496
<i>Касымбек Н.М., Маткерим Б., Иманкулов Т.С., Ахмед-Заки Да.Ж.</i>	
ILU (0) -GMRES ӘДІСІМЕН ПУАССОН ТЕНДЕУІНІҢ САНДЫҚ ШЕШІМІН ТАЛДАУ	500
<i>Сакабеков А.С., Мадалиева С.Н.</i>	
БОЛЬЦМАННЫң СТАЦИОНАР БІРӨЛШЕМДІ СЫЗЫҚТЫ МОМЕНТТІК ТЕНДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІНІҢҰШІНШІ ЖҮҮҚТАУЫ ҮШІН ВЛАДИМИРОВ-МАРШАҚ ШЕКАРАЛЫҚ ШАРТЫН ҚАНАҒАТТАНДЫРАТЫН ШЕТТІК ЕСЕПТІ АҚЫРЛЫ АЙЫРЫМ ТӘСІЛІМЕН ШЕШУ	507
<i>Кенжебек Е.Ф.</i>	
БІР ӨЛШЕМДІ ЖЫЛУ ТЕНДЕУІ ҮШІН ЯНЕНКО АЛГОРИТМІ.....	512
<i>Вуйцик В., Калижанова А.У., Кисала П., Кашиаганова Г.Б., Козбакова А.Х.</i>	
БРЭГТ ТАЛШЫҚТЫ ТОРЫНЫң НЕГІЗІНДЕ ТАЛШЫҚТЫ-ОПТИКАЛЫҚ ДАТЧИКТЕРДІ ҚОЛДАNU АРҚЫЛЫ ӨЛШЕУ ЖҮЙЕСІ.....	517
<i>Калижанова А.У., Ахметов С.С., Набиева Г.С.</i>	
МӘЛІМЕТТЕРДІ ӨНДЕУ ЖҮЙЕСІН ЖОБАЛАУДЫҢ МОДЕЛДЕРІ МЕН ӘДІСТЕРІ.....	524
<i>Нестеренкова Л.А., Нестеренков П. А.</i>	
ИЗОТЕРМИЯЛЫҚ ЕМЕС МҰНАЙ ҚҰБЫРЫНДАҒЫ ЖҰМЫС ҚҰНЫН ТӨМЕНДЕТУ	528
<i>Мұстафин М.</i>	
ҒАЛЫМ МҰСТАФИН ЖӘНЕ ОНЫң АЛГЕБРАЛЫҚ ГЕОМЕТРИЯ САЛЫМ.....	535
<i>Оразбаев Б.Б., Кенжебаева Т.С., Шангитова Ж.Е., Оразбаева К.Н., Курмангазиева Л.Т.</i>	
КЛАУС РЕАКТОРЫ ЖҰМЫС РЕЖИМДЕРІН ОПТИМИЗАЦИЯЛАУДА ҚОЛДАНЫЛАТЫН КҮКІРТ ӨНДІРУ ПРОЦЕСІНІҢ ФАКТОРЛАР ӨЗ-АРА ӘСЕРЛЕРІ ДИАГРАММАЛАРЫ НЕГІЗІНДЕГІ МОДЕЛЬДЕРІ	537
<i>Ибраев А.Т.</i>	
КОМПОЗИВТІ ВЕКТОРЛАРДЫ ҚҰРАСТАРЫУ ЖӘНЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТТІК ӨРІСТЕРДІ ЗЕРТТЕУ ҮШІН ПАЙДАЛАНУ	542
<i>Исатаев А.С., Жуматов С.С.</i>	
ЫЛЫҒЫ ЕСЕБІНДЕГІ ЛЯПУНОВТЫң ЕКІНШІ ӘДІСІ.....	548
<i>Молдакалыкова А.Ж., Наурызбаева А.И., Бижсанова А.С.</i>	
ЕСЕПТЕУ ЖҮЙЕЛЕРІНІң ТҮЙІНДЕРІНДЕ ҚОЛДАНБАЛЫ БАҒДАРЛАМАЛАР МЕН ДЕРЕКТЕР БАЗАСЫНЫң МАССИВТЕРІН ҮЛЕСТИРУ ЕСЕБІ.....	555

Химия-металлургия ғылымдары

<i>Назарбек Ұ.Б. , Абдуразова П.А., Ушкемпіров А.Г., Әбдібаева Е.У.</i>	
АММОФОС САПАСЫНЫң ПОЛИКОМПОНЕНТТІ ОРГАНОМИНЕРАЛДЫ ТЫҢАЙТҚЫШЫН АЛУ ТЕХНОЛОГИЯСЫН ӘЗІРЛЕУ	562
<i>Колесников А.С., Жақынбаев Б.Е., Садықов Ж.А., Кутжанова А.Н., Изтілеуов Г.М., Эстауова А.А., Торебекова А.М., Таусарова Да.Е., Колесникова О.Г.</i>	
ПОРТЛАНДЦЕМЕНТ КЛИНКЕРІН АЛУ БОЙЫНША ЗЕРТТЕУЛЕР	565
<i>Исмаилова Г.А., Колесников А.С., Жақынбаев Б.Е., Садықов Ж.А. Кутжанова А.Н., Изтілеуов Г.М., Эстауова А.А., Зулпихар З., Колесникова О.Г., Төребекова А.М.</i>	
ПОРТЛАНДЦЕМЕНТТІ КЛИНКЕРДІ АЛУҒА АРНАЛҒАН ҮШ ҚҰРАМДЫ ШИКІЗАТТЫҢ ҚҰРАМЫН ОҢТАЙЛАНДЫРУ	568

<i>Сырманова К.К., Агабекова А.Б., Тилеуов Г.Е., Жумаханова Г.А., Калдыбекова Ж.Б., Байжанова Ш.Б.</i>	
ОСОБЕННОСТИ ТЕХНОЛОГИИ ПОЛУЧЕНИЯ ЛАКОКРАСОЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ БИТУМА.....	458
<i>Сырманова К.К., Алипбекова Ж.К., Сакибаева С.А., Калдыбекова Ж.Б., Байжанова Ш.Б.</i>	
ИССЛЕДОВАНИЕ ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ РЕЗИНОВОЙ КРОШКИ, ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ КАЧЕСТВА БИТУМОВ И АСФАЛЬТОБЕТОНОВ.....	463
Физико-математические науки	
<i>Койшибыаев А.Б., Велямов Т.Т.</i>	
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ ЦИФРОВОГО ИМПУЛЬСНОГО УПРАВЛЕНИЯ МОДУЛЯЦИЕЙ, РАЗРАБОТАННЫХ ДЛЯ ОБЪЕКТОВ.....	467
<i>Абдуллин Х.А., Калкозова Ж.К., Мукашев Б.Н., Мухамедшина Д.М., Серикканов А.С.</i>	
РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ СИНТЕЗА НАНОСТРУКТУРИРОВАННОГО ОКСИДА ЦИНКА И ПОЛУЧЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ ДЛЯ ФОТОКАТАЛИЗАТОРОВ.....	472
<i>Сармасаев М., Айтан Н., Жанабекова Ж., Мукиат С.</i>	
О ДИДАКТИКО-МЕТОДОЛОГИЧЕСКИХ ПРИНЦИПАХ ПОСТРОЕНИЯ КАЧЕСТВЕННОГО ФИЗИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ.....	480
<i>Сармасаев М., Айтан Н., Жанабекова Ж., Мукиат С.</i>	
К ВОПРОСУ КАЧЕСТВА СОДЕРЖАНИЙ «СТАНДАРТА ОБРАЗОВАНИЯ» И ЕГО «КОНТРОЛЬНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ» ПО ФИЗИЧЕСКОМУ ОБРАЗОВАНИЮ.....	485
<i>Мукушев Б.А., Алимкулова Э.Ж., Жокижанова С.К., Ибатаев Ж.А., Нургазина Г.М., Нургалиева Д.А., Сыдыкова Ж.К., Ерженбек</i>	
ПРЕЕМСТВЕННОСТЬ В ПРОЦЕССЕ ФОРМИРОВАНИЯ ПОНЯТИЯ «ЭНЕРГИЯ СВЯЗИ».....	491
<i>Мукушев Б.А., Абельдина Ж.К., Жанайдарова Ж.Х., Нурбатырова Т.С., Шакерхан Н., Сыдыкова Ж.К., Ерженбек Б.</i>	
ФОРМИРОВАНИЕ ПОНЯТИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ.....	496
<i>Касымбек Н.М., Маткерим Б., Иманкулов Т.С., Ахмед-Заки Д.Ж.</i>	
АНАЛИЗ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА МЕТОДОМ ILU(0)-GMRES.....	500
<i>Сакабеков А.С., Мадалиева С.Н.</i>	
РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ОДНОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ МОМЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА В ТРЕТЬЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ ПРИ ОБОБЩЕННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ	
ВЛАДИМИРОВА-МАРШАКА КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫМ МЕТОДОМ.....	507
<i>Кенжебек Е.Г.</i>	
АЛГОРИТМ ЯНЕНКО ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ.....	512
<i>Вуйцик В., Калижанова А.У., Кисала П., Караганова Г.Б., Козбакова А.Х.</i>	
ИЗМЕРИТЕЛЬНАЯ СИСТЕМА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВОЛОКОННО-ОПТИЧЕСКИХ ДАТЧИКОВ С ВОЛОКОННОЙ РЕШЕТКОЙ БРЭГГА.....	517
<i>Калижанова А.У., Ахметов С.С., Набиева Г.С.</i>	
МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ СИСТЕМ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ.....	524
<i>Нестеренкова Л.А., Нестеренков П.А.</i>	
МИНИМИЗАЦИЯ СТОИМОСТИ РАБОТЫ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО НЕФТЕПРОВОДА.....	528
<i>Мустафин М.</i>	
ГАЛИМ МУСТАФИН И ЕГО ВКЛАД В АЛГЕБРАИЧЕСКУЮ ГЕОМЕТРИЮ.....	535
<i>Оразбаев Б.Б., Шангитова Ж.Е., Кенжебаева Т.С., Оразбаева К.Н., Курмангазиева Л.Т.</i>	
МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ПРОИЗВОДСТВА СЕРЫ НА ОСНОВЕ ДИАГРАММЫ ВЗАЙМНОГО ВЛИЯНИЯ ФАКТОРОВ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ РЕЖИМОВ РАБОТЫ РЕАКТОРА КЛАУСА.....	537
<i>Ибраев А.Т.</i>	
СОСТАВЛЕНИЕ И ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМПОЗИТНЫХ ВЕКТОРОВ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ.....	542
<i>Исатаев А.С., Жуматов С.С.</i>	
ВТОРОЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА В ЗАДАЧЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО КОНТУРА.....	548
<i>Молдакалыкова А.Ж., Наурызбаева А.И., Бижанова А.С.</i>	
ЗАДАЧА О РАСПРЕДЕЛЕНИИ МАССИВОВ БАЗ ДАННЫХ И ПРИКЛАДНЫХ ПРОГРАММ В УЗЛАХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ.....	555

<i>Sarmasayev M., Aytan N., Zhanabekova J., Mukiat S.</i>	
ABOUT DIDACTIC AND METHODOLOGY CONCEPTS TO ACHIEVE PROPER LEARNING OF PHYSICS	480
<i>Sarmasayev M., Aytan N., Zhanabekova J., Mukiat S.</i>	
SPEAKING OF SUBJECT MATTER QUALITY OF “STANDARDS OF EDUCATION” AND ITS “CONTROL AND TESTING MATERIALS” IN LEARNING PHYSICS.....	485
<i>Mukushev B.A., Alimkulova E.Zh., Zhokizhanova S.K., Ibatayev Zh. A., Nurgazina G.M., Nurgaliyeva D.A., Sydykova Zh.K., Yerzhenbek B.</i>	
CONTINUITY IN THE PROCESS OF «BINDING ENERGY» CONCEPT FORMATION.....	491
<i>Mukushev B.A., Abeldina Zh.K., Zhanaydarova Zh.H., Nurbatyrova T.S., Shakerkhan N., Sydykova Zh.K., Yrzheneb B.</i>	
POTENTIAL ENERGY CONCEPT FORMATION.....	496
<i>Kassymbek N.M., Matkerim B., Imankulov T.S., Ahmed-Zaki D.Zh.</i>	
ANALYSIS OF NUMERICAL SOLUTION OF POISSON EQUATION BY ILU (0)-GMRES METHOD... <i>Sakabekov A.S., Madaliyeva S.N.</i>	500
A BOUNDARY VALUE PROBLEM SOLUTION FOR A STATIONARY LINEAR ONE- DIMENSIONAL SYSTEM OF BOLTZMANN QUICK EQUATIONS IN THE THIRD APPROXIMATION UNDER THE GENERALIZED VLADIMIROV-MARSHAK BOUNDARY CONDITIONS BY THE FINITE-DIFFERENCE METHOD.....	507
<i>Kenzhebek Y.G.</i>	
THE YANENKO ALGORITHM FOR THE ONE-DIMENSIONAL HEAT CONDUCTIVITY EQUATION.....	512
<i>Wójcik W., Kalizhanova A.U., Kisala P., Kashaganova G.B., Kozbakova A.H.</i>	
A MEASURING SYSTEM USING FIBER-OPTIC SENSORS WITH THE FIBER BRAGG GRATINGS.....	517
<i>Kalizhanova A.U., Akhmetov S.S., Nabiyeva G.S.</i>	
MODELS AND METHODS OF DESIGNING DATA PROCESSING SYSTEMS.....	524
<i>Nesterenova L.A., Nesterenkov P.A.</i>	
LOWERING THE OPERATING COST OF A NON-ISOTHERMAL OIL PIPELINE.....	528
<i>Mustafin M.</i>	
GALIM MUSTAFIN AND HIS CONTRIBUTION TO THE ALGEBRAIC GEOMETRY.....	535
<i>Orazbayev B.B., Kenzhebayeva T.S., Shangitova Zh.Y., Orazbayeva K.N., Kurmangaziyeva L.T.</i>	
MODELS OF SULFUR PRODUCTION BASED ON DIAGRAM OF MUTUAL INFLUENCE OF FACTORS FOR OPTIMIZING OPERATING MODES OF CLAUS REACTOR.....	537
<i>Ibrayev A.T.</i>	
DESIGNING AND USING OF COMPOSITE VECTORS TO STUDY ELECTROMAGNETIC FIELDS.....	542
<i>Issatayev A.S., Zhumatov S.S.</i>	
SECOND METHOD OF LYAPUNOV IN THE TASK ON STABILITY OF PARAMETRICAL CONTOUR.....	548
<i>Moldakalykova A., Nauryzbayeva A., Bizehanova A.</i>	
CALCULATION OF THE DISTRIBUTION OF THE ARRAYS OF APPLICATIONS AND DATABASES IN THE NODES OF THE COMPUTING SYSTEM.....	555

Chemical and metallurgical sciences

<i>Nazarbek U.B., Abdurazova P.A., Ushkemirov A.G., Abdibayeva Y.U.</i>	
A TECHNOLOGY DEVELOPMENT FOR OBTAINING MULTICOMPONENT ORGANIC FERTILIZER OF AMMOPHOS QUALITY.....	562
<i>Kolesnikov A.S., Zhakipbayev B.E., Sadykov Zh.A., Kutzhanova A.N., Iztleuov G.M., Yestauova A.A., Torebekova A.M., Kolesnikova O.G., Krupa V.S., Tauasarova D.E.</i>	
RESEARCH ON PORTLAND CEMENT CLINKER.....	565
<i>Ismayilova G.A., Kolesnikov A.S., Zhakipbayev B.E., Sadykov Zh.A., Kutzhanova A.N., Iztleuov G.M., Yestauova A.A., Zulpykhar Z., Kolesnikova O.G., Torebekova A.M.</i>	
Optimization of a three-component raw material mixture for receiving a cement clinker.....	568
<i>Kolesnikov A.S., Narmakhanova A., Sadykov Zh.A., Zhakipbaev B.E., Kutzhanova A.N., Iztleuov G.M., Estauova A.A., Kolesnikova O.G., Krupa V.S., Torebekova A.M.</i>	
FINDING OPTIMAL PARAMETERS OF THREE-COMPONENT RAW MATERIALS MIXTURE TO OBTAIN A BELITE CLINKER.....	572
<i>Kolesnikov A.S., Mahat S.A., Sadykov Zh.A., Zhakipbayev B.E., Kutzhanova A.N., Iztleuov G.M., Estauova A.A., Kolesnikova O.G., Krupa V.S., Torebekova A.M.</i>	
OPTIMIZATION OF TWO-COMPONENT RAW MATERIAL MIXTURE FOR RECEIVING A CEMENT CLINKER.....	577